# ベクトルや図形と式の問題で重宝される三角形の面積公式

三角形 ABC の面積を $S$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|ps-qr|}$

$S=\frac{1}{2}|ps-qr|$ は，ベクトルや図形と式の問題で威力を発揮する重要公式である。

公式の証明

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin A &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sqrt{1-\cos^2 A} \quad \left(\because 0<A<\pi \text{より} \sin A>0 \therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos A\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left(r^2+s^2\right)-\left(pr+qs\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{p^2s^2-2pqrs+q^2r^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(ps-qr\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}|ps-qr|
\end{aligned}
$$